Komputerowe obrazy "niepróbkowalnych" funkcji czasu

Andrzej Kubaszek
Politechnika Rzeszowska, Wydział Elektrotechniki i Informatyki
35 - 959 Rzeszów, ul. W. Pola 2, E-mail: kubaszek@prz.rzeszow.pl

Funkcje, które występują w modelowaniu układów, są najczęściej przedziałami ciągłe i są reprezentowane w komputerze jako ciągi liczb, np. ciągi próbek. W trakcie symulacji komputerowych mogą pojawić się wyniki, które są obrazami funkcji abstrakcyjnych, jak np. funkcja zawierająca człon z ujemnym czasem opóźnienia. Mogą to być poprawne wyniki pośrednie a niekiedy także wyniki końcowe. Artykuł pokazuje własności takich funkcji oraz obrazy odpowiadających im ciągów próbek.

I. Wstęp

W trakcie modelowania komputerowego czy przetwarzania sygnałów możemy spotkać się z sytuacją, że uzyskiwane wyniki odbiegają od tych, których się spodziewamy. Sytuacja może przypominać przypadek niestabilności numerycznej związanej z zaokrągleniami liczb. Może okazać się następnie, że działania które powinny zaradzić problemowi, jak np. zwiększanie dokładności obliczeń czy zagęszczanie próbkowania nie tylko nie pomagają, ale wręcz potęgują dziwne zjawisko. Być może jednak są to poprawne numerycznie wyniki, o czym można się przekonać wykonując na nich kilka dodatkowych przekształceń, opisanych w tym artykule.

II. Modelowanie komputerowe

Skorzystamy z oznaczeń wprowadzonych przez Mikusińskiego [7] i przez $\{f(t)\}$ oznaczać będziemy całą funkcję, odróżniając ten zapis od $f(t)$, który oznacza wartość funkcji w punkcie t. Podobnie $\{f_0, f_1, ...\}$ oraz $\{f_k\}$ oznaczać będzie ciąg elementów f_k.

Rozważmy zadanie modelowania komputerowego, którego celem jest wyznaczenie funkcji rzeczywistej argumentu rzeczywistego na ustalonym zbiorze argumentów. Rozwiązanie takie jest otrzymywane na ogół w formie ciągu próbek $\{f_k\}$, który pozwala na odtworzenie przybliżenia funkcji $\{f(t)\}$. Może to być ciąg współczynników jakiegoś szeregu funkcyjnego, czy ciągu funkcji sklejanych. Dla uproszczenia rozważań możemy wyobrażać sobie przypadek próbkowania równomiernego, gdzie ciąg próbek $\{f(h), f(2h), f(3h), ...\}$ ($h > 0$ to krok próbkowania) pozwala na przybliżanie funkcji $\{f(t)\}$ liniową aproksymacją. Mamy więc pojęcia

- funkcji $\{f(t)\}$,
- która jest przybliżana za pomocą ciągu liczb $\{f_k\}$,
- gdyż jest ustalona operacja odwzorowania ciągu na aproksymację funkcji – oznaczmy tą ustaloną operację przez $A_{pprox}()$, tj, $\{f_k\} \mapsto \{A_{pprox}(\{f_k\}, t)\}$.

Powiemy, że ciąg $\{f_k\}$ jest ciągiem próbek funkcji $\{f(t)\}$ i oznaczymy to $\{f_k\} \approx \{f(t)\}$, jeśli $\{A_{pprox}(\{f_k\}, t)\}$ jest aproksymacją $\{f(t)\}$ przy ustalonym błędzie aproksymacji, tj. $\{f_k\} \approx \{f(t)\}$ jeśli $\{A_{pprox}(\{f_k\}, t)\} \approx \{f(t)\}$.

Dalej korzystając z oznaczeń wprowadzonych przez Mikusińskiego możemy oznaczać funkcje literami pomijając "(t)": $f \equiv \{f(t)\}$. Dla odróżnienia ciągi możemy oznaczać literami z podkreśleniem, tj. $\underline{f} \equiv \{f_k\}$. Czyli $\underline{f} \approx f$, jeśli $A_{pprox}(\underline{f}) \approx f$.

W modelowaniu komputerowym ciągi próbek są przetwarzane i na podstawie wyników, które są nowymi ciągami próbek poprzez aproksymację odtwarzane są przybliżenia poszukiwanych funkcji. Na ogół funkcje wynikowe mają nieznany przebieg, stąd są ustalane jako granica rozwiązań przy zmniejszaniu niedokładności aproksymacji $\underline{y} = \lim \underline{y}_i$, gdzie kolejne rozwiązania $\underline{y}_i$ są uzyskiwane dzięki operacji, którą tutaj nazwiemy *procesem zagęszczania próbkowania*. W przypadku próbkowania równomiernego oznaczać to może zmniejszanie kroku próbkowania h, przy równoczesnym zwiększaniu precyzji obliczeń numerycznych. Jeśli w procesie zagęszczania próbkowania zaobserwujemy jednostajną zbieżność ciągu funkcji o elementach $A_{pprox}(\underline{y}_i)$, to granicę takiego ciągu uznamy za wynik obliczeń.

III. Funkcja "niepróbkowalna"

W trakcie modelowania może dojść jednak do sytuacji, że wyniki uzyskiwane w procesie zagęszczania próbek są rozbieżne, w takim sensie, że kolejne funkcje wynikowe $A_{pprox}(\underline{y}_i)$ nie tworzą ciągu zbieżnego. Choć obrazy tych kolejnych rozwiązań mogą wydawać się bardzo chaotyczne, to jednak wyniki takie mogą mieć pewien sens.

Wprowadźmy abstrakcję – funkcję "niepróbkowalną". Funkcja "nieporóbkowalna" u, to taka, że jej ciągi próbek $\underline{u}_i$ uzyskiwane w procesie zagęszczania próbkowania nie dają ciągu funkcji $A_{pprox}(\underline{u}_i)$ zbieżnego jednostajnie.

W przypadku próbkowania równomiernego dla "niepróbkowalnej" funkcji $u=\{u(t)\}$ ($t \geq 0$) w i-tej iteracji zagęszczania próbkowania dostajemy ciąg próbek $\underline{u}_i = \{u(h_i), u(2h_i), u(3h_i), ...\}$ ($h_i > 0$ oraz $h_i < h_{i-1}$) a ciąg funkcji $A_{pprox}(\underline{u}_i)$ nie jest zbieżny jednostajnie.

W jaki sposób zadana może być taka funkcja? Mogą to być wzory czy algorytmy, które pozwalają wyznaczać ciągi próbek. Funkcje takie mogą być przydatne w procesie przetwarzania sygnałów, mogą pojawiać się jako wyniki w modelowaniu komputerowym i to zarówno jako poprawne wyniki pośrednie jak i wyniki końcowe, których analiza pozwala wykryć błąd modelu.

IV. Przykład 1 – wysoka pochodna

W dalszej części artykułu ciągi próbek będą utożsamiane z ciągiem cyfr liczb wielomianowych [1, 4, 3], czyli ciągowi $\{f_0, f_1, f_2, ...\}$ będzie wzajemnie jednoznacznie odpowiadała liczba wielomianowa $(\tilde{}\ f_0\ \tilde{}, f_1\ \tilde{}\ f_2\ \tilde{}\ ...\tilde{})$.

Można pokazać [4, 5], że dla funkcji $\{f(t)\}$ i jej transformaty Laplace'a zdefiniowanej jako funkcja $F(p)$ operatora Heavisidea p [2] w rachunku operatorowym Mikusińskiego zachodzi wzór $\{f(t)\} = F(p)\, p\, \{1\}$, a ciąg próbek funkcji $\{f(t)\}$ można obliczać [3] z wzoru

$$p = \frac{1}{\int_0^t} \quad (1)$$

$$\underline{f} = F(\underline{p})\, \underline{p}\, (\tilde{}\ 0.5\ \tilde{}, 1\ \tilde{}\ 1\ \tilde{}\ 1\ \tilde{}\ ...\tilde{}) \quad (2)$$

gdzie $\underline{p}$ jest ciągiem próbek aproksymującym operator Heavisidea. Np. dla metody trapezów mamy:

$$\underline{p} = \frac{2}{h}\frac{(\tilde{}1\tilde{},-1\tilde{})}{(\tilde{}1\tilde{},1\tilde{})} = \frac{2}{h}(\tilde{}1\tilde{},-2\tilde{}2\tilde{}\;-2\tilde{}2\tilde{}\ldots\tilde{}) \qquad (3)$$

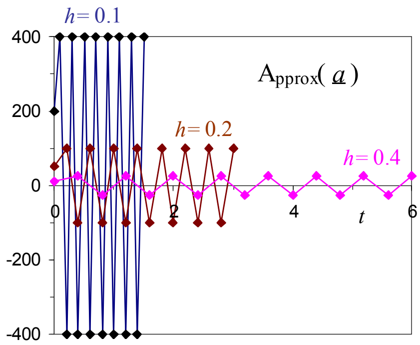
gdzie h jest krokiem próbkowania.

Niech $a = \{a(t)\}$ będzie taką funkcją, że jej transformatą Laplace'a jest $A(p) = p$. Ciąg próbek funkcji a wyznaczony z wzoru (2)

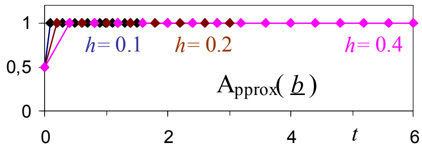
$$\underline{a} = \underline{p}\cdot\underline{p}\cdot(\tilde{}0.5\tilde{},1\tilde{}1\tilde{}\ldots\tilde{}) = \frac{2}{h^2}(\tilde{}1\tilde{},-2\tilde{}2\tilde{}\;-2\tilde{}2\tilde{}\ldots\tilde{}) \qquad (4)$$

pokazano na rys. 1 dla kilku malejących wartości h. Aproksymacje liniowe ciągów próbek $\underline{a}$ uzyskiwanych w procesie zagęszczania próbek nie tworzą ciągu funkcji zbieżnych jednostajnie. Stąd a jest przykładem funkcji "niepróbkowalnej". Jeśli omawianą funkcję poddamy dwukrotnie operacji całkowania, to dostaniemy próbkowalną funkcję czasu b, której transformatą Laplace'a jest $B(p) = A(p)\,p^{-2} = p^{-1}$, stąd z (2) mamy zilustrowany na rys. 2 ciąg próbek:

$$\underline{b} = (\tilde{}0.5\tilde{},1\tilde{}1\tilde{}1\tilde{}\ldots\tilde{}) \qquad (5)$$



Rys. 1. Aproksymacje funkcji $\{a(t)\}$ uzyskiwane w procesie zagęszczania próbek

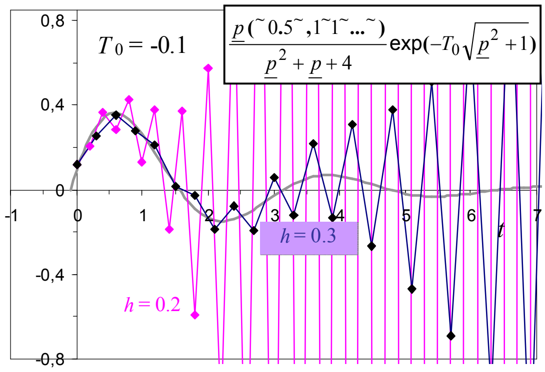


Rys. 2. Aproksymacje funkcji $\{b(t)\}$, która jest 2-krotną pierwotną funkcji $\{a(t)\}$

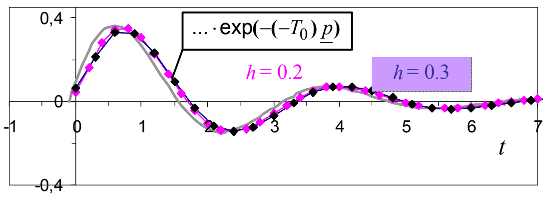
Funkcja a, choć nie ma sensu fizycznego to może się pojawić np. jako pośredni wynik obliczeń i może być reprezentowana przez ciąg próbek. Ten ciąg próbek jest w pełni użyteczny, bo po wykonaniu dalszych operacji prowadzi do wyniku który aproksymuje funkcję czasu. Ta symulacja ilustruje też pojęcie dystrybucji, która jest abstrakcją o pewnych właściwościach, i dla której definiuje się np. granice w sensie dystrybucyjnym w taki sposób, że po wykonaniu n-krotnej operacji całkowania dla elementów ciągu i jego granicy dostajemy ciąg zbieżny jednostajnie i jego granicę [8].

V. Przykład 2 – ujemne opóźnienie

W [6] pokazano sposób zwiększania dokładności wyznaczania funkcji wykładniczej $\exp(F(\underline{p}))$, gdzie przy pewnych parametrach można zaobserwować ciągi próbek odpowiadające ujemnemu opóźnieniu (czyli jakby przewidywaniu przyszłości). Na rys. 3 pokazano ciąg próbek takiej funkcji, której wzorzec jest narysowany szarą gładką linią. Zwiększanie dokładności nie daje żadnej poprawy zbieżności ciągu próbek. Jednak i ten ciąg próbek nie jest obrazem błędu obliczeniowego, lecz funkcji "niepróbkowalnej", która po przetworzeniu polegającym na jej opóźnieniu da ciąg próbek funkcji próbkowalnej, co ilustruje rys. 4.



Rys. 3. Aproksymacje funkcji z ujemnym opóźnieniem uzyskiwane w procesie zagęszczania próbek; linia gładka to funkcja wzorcowa



Rys. 4. Aproksymacje funkcji jak na rys. 3 po zadziałaniu operatora opóźnienia o czas $|T_0|$

VI. Podsumowanie

Funkcja "niepróbkowalna" to abstrakcyjna funkcja czasu, która ilustruje pojęcie uogólnionej funkcji czasu w rachunku operatorowym Mikusińskiego [7], który zauważył, że nie można odrzucać występowania takich funkcji w trakcie obliczeń, choć przy modelowaniu zjawisk fizycznych, nie będą one wynikami końcowymi. W artykule pokazano obrazy ciągów próbek takich funkcji.

Literatura

[1] Bellert S.: Metoda operatorów liczbowych, Rozprawy Elektrotechniczne, t. 1, z. 4, 1959.
[2] Bittner, R.: Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych, PWN, Warszawa 1974.
[3] Dmytryszyn R., Kubaszek A.: Multimethodical Approach and Generation of Sequence of Expressions for Acceleration of Repetitive Analysis of Analog Circuits, Analog Integrated Circuits & Signal Processing, 31(2), Kluwer Academic Publishers 2002, s. 147-159.
[4] Kubaszek A.: Komputerowa analiza propagacji sygnałów metodą liczb wielomianowych, Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań 1994.
[5] Kubaszek A.: Polynomial Number Method - Computer Implementation of Some Operational Calculi, Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR-2000, Miedzyzdroje 2000, s. 379-384.
[6] Kubaszek A.: Time Domain Repetitive Analysis of Analog Circuits with Transmission Lines, SMACD'2004, Wrocław 2004, s. 67-70.
[7] Mikusinski J.: Rachunek operatorów, PWN, Warszawa 1957.
[8] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego, WNT, Warszawa 1981.

Images of "unsamplable" time-domain functions

Computer simulation leads in some cases to results, which can be supposed as numerical instability. In the paper was shown, that some of that results should be accepted – they are generalized time-domain functions described by Mikusinski, and after some operations lead to useful solutions. Images of samples of these "unsaplable" functions were shown and important properties were discussed.